ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 132 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-359-369

УДК 517.977.8

Минимаксные дифференциальные игры с последействием

Аркадий Владимирович КИМ[1], **Геннадий Алексеевич БОЧАРОВ**[2]

[1] ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

[2] ФГБУН «Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука» Российской академии наук
119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Губкина, 8

Minimax differential game with delay

Arkadii V. KIM[1], **Gennady A. Bocharov**[2]

[1] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

[2] Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences
8 Gubkin St., Moscow 119333, Russian Federation

Аннотация. В статье на основе методологии i-гладкого анализа рассматривается минимаксная позиционная дифференциальная игра с последействием. В конечномерном (ОДУ) случае для минимаксной дифференциальной игры разрешающие смешанные стратегии могут быть построены с использованием метода динамического программирования. В статье показано, что методология i-гладкого анализа позволяет полностью аналогично конечномерному случаю строить контрстратегии. Причем, как характерно для применения i-гладкого анализа, в случае отсутствия последействия, все результаты статьи переходят с точностью до обозначений в соответствующие результаты конечномерной теории позиционных дифференциальных игр.

Ключевые слова: дифференциальные игры; системы с последействием

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00352_а).

Для цитирования: *Ким А.В., Бочаров Г.А.* Минимаксные дифференциальные игры с последействием // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 359–369. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-359-369.

Abstract. The paper considers a minimax positional differential game with aftereffect based on the i-smooth analysis methodology. In the finite-dimensional (ODE) case for a minimax differential game, resolving mixed strategies can be constructed using the dynamic programming method. The report shows that the i-smooth analysis methodology allows one to construct counterstrategies in a completely similar way to the finite-dimensional case. Moreover as it is typical for the use of i-smooth analysis, in the absence of an aftereffect, all the results of the article pass to the corresponding results of the finite-dimensional theory of positional differential games.

Keywords: differential games; systems with delays

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00352_a).

For citation: Kim A.V., Bocharov G.A. Minimaksnyye differentsial'nyye igry s posledeystviyem [Minimax differential game with delay]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 359–369. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-359-369. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Как известно, при постановке задач, составляющих минимаксную игру, игроки-союзники из противоположных задач наделяются неравными информационными возможностями (см. [1]). Отметим, что основы теории игр с последействием заложены в работах [2–4]. В данной статье рассматриваются аналогичные постановки и конструкции для минимаксной игры в системе с последействием. Систематически используются терминология и конструкции i-гладкого анализа (см. [5–7]).

1. Постановка задачи

Пусть $\tau > 0$. Обозначим $Q[-\tau, 0)$ — пространство кусочно-непрерывных функций $y(s) : [-\tau, 0) \to R^n$, положим $H = R^n \times Q[-\tau, 0)$.

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, y(\cdot), u, v),$$

где $f(t, x, y(\cdot), u, v) : T \times R^n \times Q[-\tau, 0) \times P \times Q \to R^n$, $u \in P \subset R^r$, $v \in Q \subset R^q$.

Обозначим $h = \{x, y(\cdot)\} \in H$, $x(t + \cdot) = \{x(t + s),\ s \in [-\tau, 0)\}$, $x_t = \{x(t), x(t + \cdot)\} \in H$.

Игра сближения–уклонения состоит из задачи сближения для первого игрока-союзника, которая будет решаться им в классе контрстратегий $U^v = u\big(t, x, y(\cdot), v\big)$ при условии дискриминации второго игрока-противника. Задача об уклонении для второго игрока-союзника должна решаться в классе чистых стратегий $V = v\big(t, x, y(\cdot)\big)$. В соответствии с этим минимаксной называется такая игра, в которой объединяются противоположные задачи, каждая из которых в соответствии с общим правилом ставится для игрока-союзника [1]. Но одна из задач ставится в классе стратегий, а другая — ей противоположная — в классе контрстратегий.

Таким образом, при постановке задач, составляющих минимаксную игру, игроки-союзники из противоположных задач наделяются неравными информационными возможностями.

Первой задачей будет задача о сближении, решение которой требуется определить в классе чистых стратегий $U \div u\big(t, x, y(\cdot)\big)$. Наряду с задачей сближения, естественно, рассматривается и задача об уклонении, решение которой ищется в классе контрстратегий $V^u \div v\big(t, x, y(\cdot)\big)$. Определим соответствующие понятия контрстратегий и движений, которые порождаются этими конрстратегиями.

Контрстратегии второго игрока $V \div v\big(t, x, y(\cdot)\big)$ будем отождествлять с функционалами $v = v\big(t, x, y(\cdot), u\big)$, которые определены для всех позиций и векторов $u \in P$ и удовлетворяют условию $v(t, x, y(\cdot), u) \in Q$.

Пусть Δ — система полуинтервалов $[\xi_i, \xi_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots)$, покрывающих полуось $[t_*, \infty)$ и $V \div v\big(t, x, y(\cdot)\big)$ — некоторая контрстратегия второго игрока. Назовем ломаной Эйлера $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_*, h^*, V^u]$ абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения в контингенциях

$$\begin{aligned}\dot{x}_\Delta[t] =& F_u\big(t, x_\Delta[t], x_\Delta[t+\cdot], v(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], \cdot)\big), \quad \xi_i \le t < \xi_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots;\\ & x_\Delta[t_*] = x^*, \quad x_\Delta[t_* + \cdot] = y^*(\cdot),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&F_u\big(t, x_\Delta[t], x_\Delta[t+\cdot], v(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], \cdot)\big) =\\ &\qquad = co\big[f : f\big(t, x, y(\cdot), u, v(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], x_\Delta[\xi_i + \cdot], u)\big), \ u \in P\big].\end{aligned}$$

Движением $x[t] = x[t, t_*, h^*, V^u]$, порожденным контрстратегией $V^u \div v(t, h, u)$, из позиции $\{t_*, h^*\}$ называется функция $x[t]$ $(x_{t_*} = h^*)$, для которой существует последовательность ломаных Эйлера $x_{\Delta^{(k)}}[t] = x_{\Delta^{(k)}}[t, t_*, h^{(k)}, V^u]$ $(k = 1, 2, \dots .)$, сходящаяся равномерно к $x[t]$ на каждом конечном отрезке $[t_0, \theta]$ при условии $\sup\limits_i(\xi^{(k)}_{i+1} - \xi^{(k)}_i) \to 0$, $(k \to \infty)$.

Для любой позиции $\{t_*, h^*\}$ и для любой пары $U \div u\big(t, x, y(\cdot)\big)$ — чистой стратегии первого игрока и $V^u \div u\big(t, x, y(\cdot), u\big)$ — контрстратегии второго игрока все движения $x[t, t_*, h^*, U, V^u]$ содержатся как во множестве всех движений $x[t] = x[t, t_*, h^*, U]$, так и во множестве всех движений $x[t] = x[t, t_*, h^*, U, V^u]$. Это положение позволяет объединять задачу для первого игрока в классе стратегий и задачу для второго игрока в классе контрстратегий в одну игру. Контрстратегии первого игрока $U \div \big(t, x, y(\cdot)\big)$ будем отождествлять с функционалами $u = u\big(t, x, y(\cdot), v\big)$, определенными при всех $\big(t, x, y(\cdot)\big)$ и $v \in Q$ и удовлетворяющими условию $u\big(t, x, y(\cdot), v\big) \in P$. Ломаные Эйлера $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_*, h^*, U, V^u)$ при этом определяются как абсолютно непрерывные решения дифференциальных уравнений в контингенциях

$$\begin{aligned}\dot{x}_\Delta[t] =& F_u\big(t, x_\Delta[t], x_\Delta[t+\cdot], u(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], x_\Delta[\xi_i+\cdot], \cdot)\big), \quad \xi_i \le t < \xi_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, ;\\ & x_\Delta[t_*] = x^*, \quad x_\Delta[t + \cdot] = y^*(\cdot),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&F_u(t, x, u(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], x_\Delta[\xi_i + \cdot], \cdot) =\\ &\qquad = co\big[f : f = f\big(t, x, y(\cdot), u(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], x_\Delta[\xi_i + \cdot], v), v\big), \ v \in Q\big].\end{aligned}$$

Для каждой пары $\{U^v, V\}$ можно определить движения $x[t] = x[t, t_*, h^*, U^v, V]$, которые содержатся во множестве всех движений $x[t] = x[t, t_*, h^*, U^v]$. Это положение позволяет объединить задачу первого игрока в классе контрстратегий и задачу второго игрока в классе стратегий в одну игру.

Задача о сближении, рассматриваемая в классе контрстратегий $U^v \div u(t, h, v)$, формулируется следующим образом.

Задача 1. Требуется найти контрстратегию $U^v_c \div u_c(t, h, v)$ для которой всякое движение $x[t] = x[t, t_0, h^0, U^v_c]$ $(x_{t_*} = h^*)$ удовлетворяет условию встречи

$$\{\mu, x[\mu]\} \in M, \quad \{t, x[t]\} \in N_c \ \text{ при } \ t_0 \le t < \mu,$$

где μ — момент времени, когда точка $\{t, x[t]\}$ впервые попадает на множество M_c.

Далее рассматривается случай, когда контрстратегия обеспечивает сближение к заданному моменту $t = \theta$, т. е. для любого движения $x[t] = x[t, t_0, h^0, U^v_c]$ момент μ удовлетворяет оценке $\mu \le \theta$.

Задача об уклонении, рассматриваемая в классе контрстратегий $V^u \div v\big(t, x, y(\cdot), u\big)$, формулируется следующим образом.

Задача 2. Требуется найти контрстратегию V_c^u, которая на заданном отрезке времени $[t_0, \theta]$ исключает встречу, т.е. для которой всякое движение $x[t] = x[t, t_0, h^0, V_c^u]$ удовлетворяет условию

$$\{t, x[t]\} \notin G(M_c) \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le \mu,$$

где $\mu = \theta$, если при всех $t \in [t_0, \theta]$ выполняется условие $\{t, x[t]\} \in H(N_c)$, а в противном случае μ есть первый момент времени, когда позиция $\{t, x[t]\}$ покидает открытую область $H(N_c)$. Здесь M_c, N_c — замкнутые множества, $G(M_c)$ и $H(N_c)$ — некоторые открытые окрестности этих множеств.

Задача 1 будет рассматриваться в одной игре вместе с задачей об уклонении, решение которой требуется определить в классе чистых стратегий $V \div v(t, h)$.

2. Дифференциальная игра с заданным моментом окончания.

Далее рассмотрим к наиболее удобную для исследования дифференциальную игру с заданным моментом $\mu = \theta$ окончания. В этой игре функционал, минимизируемый первым и максимизируемый вторым игроком, имеет вид

$$\phi(x[t], t_0 \le t \le \theta) = \sigma(x[\theta]),$$

т. е. отождествляется с некоторой заданной функцией $\sigma(x[\theta])$ от конечного состояния $x[\theta]$ рассматриваемой системы. Функция $\sigma(\cdot)$ предполагается непрерывной.

Теорема 2.1. *Предположим, что удалось найти инвариантно непрерывный в области* $t_0 \le t \le \theta$ *функционал* $\varepsilon\big(t, x, y(\cdot)\big)$, *который удовлетворяет краевому условию*

$$\varepsilon\big(\theta, x, y(\cdot)\big) = \sigma\big(x, y(\cdot)\big),$$

имеет инвариантно непрерывные частные $\partial\varepsilon/\partial x_i$ *и коинвариантную производные* $\partial_t\varepsilon$ *в области*

$$\sigma_0 < \varepsilon(\theta, x, y(\cdot) < \sigma^0; \quad t_0 \le t < \theta, \tag{2.1}$$

причем

$$\sigma_0 = \inf_h \sigma(h), \quad \sigma^0 = \sup_h \sigma(h); \tag{2.2}$$

и удовлетворяет в этой области (2.1) *условию*

$$\min_u \max_v \big([\partial\varepsilon/\partial x]' f(t, h, u, v) + \partial_t\varepsilon\big) = 0. \tag{2.3}$$

Пусть далее стратегия $U^0 \div u^0(t, h)$ *и контрстратегия* $V_0^u \div v^0(t, h, u)$ *определены в области* (2.1) *условиями*

$$\max_v \big([\partial\varepsilon/\partial x]' f(t, h, u^0(t, h), v)\big) = \min_u \max_v \big([\partial\varepsilon/\partial x]' f(t, h, u, v)\big),$$
$$[\partial\varepsilon/\partial x]' f\big(t, h, u, v^0(t, h, u)\big) = \max_v \big([\partial\varepsilon/\partial x]' f(t, h, u, v)\big),$$

а в областях $\varepsilon\big(t, x, y(\cdot)\big) \le \sigma_0$, $\varepsilon\big(t, x, y(\cdot)\big) \ge \sigma^0$ *— любыми допустимыми функционалами* $u^0\big(t, x, y(\cdot)\big)$ *и* $v^0\big(t, x, y(\cdot)\big)$.

Тогда пара $\{U^0, V_0^u\}$ *образует седловую точку дифференциальной игры на минимакс–максимин функционала* ϕ. *При этом цена данной дифференциальной игры определяется равенством*

$$\gamma_0 = \gamma_0^u = \varepsilon(t_0, h^0).$$

3. Программные конструкции

Дадим определение программы второго игрока для случая минимаксной игры сближения с множеством M_c. Будем называть такой программой на полуинтервале $(t_0, \theta]$ всякое слабо замкнутое множество $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}$ программных управлений $\eta_t(du, dv)$, $t_* < t < \theta$, удовлетворяющее следующим условиям.

1) Какова бы ни была слабо измеримая функция $\mu_t(du)$, среди элементов $\eta_{(\cdot)}$ из $\eta_{(\cdot)}[t_*, \theta)$ найдется по крайней мере одно управление $\eta_t(du, dv)$, согласованное с $\mu_t(du)$, $t_* \le t < \theta$, условием

$$\int_Q \eta_t(du, dv) = \mu_t(du) \tag{3.1}$$

при почти всех $t \in [t_*, \theta)$.

2) Пусть $\mu_t^{(i)}$ — некоторая слабо измеримая по t функция-мера, согласованная с мерой $\eta_t^{(i)}(du)$ условием (3.1), T — измеримое множество из полуинтервала $[t_*, \theta)$ и $\{\eta_{(\cdot)}[t_*, \theta)\}_\Pi$ — программа второго игрока, содержащая $\eta_{(\cdot)}^{(i)}(du, dv)$. Обозначим символом $\{\eta_{(\cdot)}(du, dv)\}^{[i],T}$ — множество слабо измеримых функций-мер $\eta_t(du, dv)$ $(t \in T)$, каждая из которых согласована с мерой $\mu_t^{(i)}(du)$ условием (3.1) и является отрезком для $t \in T$ управления $\eta_{(\cdot)}(du, dv) \in \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}_\Pi$, совпадающим с $\eta_t^{(i)}(du, dv)$ при $t \notin T$. Каковы бы ни были слабо измеримые функции $\mu_t^{(1)} d(u)$ и $\mu_t^{(2)} d(u)$ $(\, t_* \le t < \theta\,)$, совпадающие на некотором измеримом множестве $T \subset [t_*, \theta)$, и каковы бы ни были управления $\eta_t^{(1)}(du, dv)$ и $\eta_t^{(2)}(du, dv)$ $(\, t_* \le t < \theta\,)$ из $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}_\Pi$, согласованные с $\mu_t^{(1)} d(u)$ и $\mu_t^{(2)} d(u)$ соответственно условием (3.1), множества $\{\eta_{(\cdot)}(du, dv)\}^{[i],T}$ и $\{\eta_{(\cdot)}(du, dv)\}^{[2],T}$, будут совпадать.

Элементарные программы $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}_\Pi$ конструируются аналогично конечномерному случаю [1].

4. Вспомогательные программные задачи

Пусть $\omega\big(t, x, y(\cdot), m\big)$ — некоторый функционал, непрерывный по позиции $\{t, x, y(\cdot)\}$ и параметру m, может быть векторному, из какого-то векторного пространства $\{m\}$. Будем предполагать, что функционал $\omega\big(t, x, y(\cdot), m\big)$ в области $\omega\big(t, x, y(\cdot), m\big) > c$ имеет непрерывные частные $\partial\omega/\partial x_i$ и коинвариантную $\partial_t \omega$ производные. Пусть, далее, в пространстве $\{t, m\}$ задано ограниченное замкнутое множество M, сечения которого гиперплоскостью $t = const$ будем, как обычно, обозначать $M(t)$. Пусть далее

$$\rho\big(t, x, y(\cdot)\big) = \min_{v \in M(t)} \omega\big(t, x, y(\cdot), m\big). \tag{4.1}$$

В частности, может быть, что пространство $\{m\}$ совпадает с пространством $\{x\}$, тогда роль множества M может играть часть множества M_c, содержащаяся в какой-нибудь сфере $\|x\| \le R$ достаточно большого радиуса, а роль функции $\omega(t, x, y(\cdot), m)$ — величина

$$\omega\big(t, x, y(\cdot), m\big) = \|x - m\| + c. \tag{4.2}$$

Тогда

$$\rho(\theta, x) = \rho_\theta(x, M_c) \ \text{ при } \ \|x\| + \rho_\theta(x, M_c) \le R. \tag{4.3}$$

Здесь, как и раньше, символ $\rho(x, M_c)$ обозначает евклидово расстояние от точки (θ, x) до сечения $M_c(\theta)$ множества M_c гиперплоскостью $t = \theta$.

Первая из вспомогательных программных задач формулируется следующим образом.

Задача 3. Задано значение θ, при котором множество $M(\theta)$ не пусто. Задана начальная позиция $\{t_*, h^*\}$ $(t_* \le \theta)$ и выбрана программа $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}_\Pi$. Среди программных управлений $\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}_\Pi$ требуется найти оптимальное минимизирующее управление η_t^0 $(t_* \le t < \theta)$, которое удовлетворяет следующему условию:

$$\rho\big(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta^0_{(\cdot)})\big) = \min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \rho(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}).$$

Если предполагать, что в данной вспомогательной задаче право выбора программы $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ предоставляется второму игроку, а право выбора программного управления η_t $(t_* \le t < \theta)$ из выбранной таким образом программы $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ — первому игроку, то эту Задачу 3 мы можем трактовать как вспомогательную задачу, которая ставится перед первым игроком в той или иной реализовавшейся позиции $\{t_*, h^*\}$, при условии, что ему сообщается программа $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$, выбранная вторым игроком.

Задача 3 имеет решение при всяком задании начальной позиции $\{t_*, h^*\}$ и при всяком выборе программы $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}_\Pi$. В самом деле, величина

$$\rho = (\theta, x) = \min_{m \in M(\theta)} \omega(\theta, x, m)$$

есть непрерывная функция x, а переменная $x = x(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)})$ зависит непрерывно от управления η_t $(t_* \le t < \theta)$, если близость программных управлений η_t друг к другу оценивать в слабой топологии. Но такой функционал $\rho\big(\theta, x\{\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}\}\big)$ на слабо компактном множестве $\{\eta_{(\cdot)}[t_*, \theta)\}_\Pi$ своих аргументов обязательно достигает минимума на каком-то программном управлении $\{\eta^0_{(\cdot)}\}$, который и доставляет, стало быть, решение $\{\eta^0_{(\cdot)}\}$ Задачи 3.

Вторая вспомогательная программная задача формулируется следующим образом.

Задача 4. Дана начальная позиция $\{t_*, h^*\}$ и отрезок времени $[t_*, \theta]$, причем множество $M(\theta)$ не пусто. Требуется найти максиминное программное управление η_t^{00}, $t_* \le t < \theta$, которое удовлетворяет условию максимина:

$$\rho\big(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta^{00}_{(\cdot)})\big) = \max_{\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \rho\big(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)})\big) = \varepsilon_0(t_*, h^*, \theta). \tag{4.4}$$

Программу $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}^0_\Pi$, на которой достигается максимум в правой части (4.4) и в которой по условию Задачи 4 должно содержаться искомое управление $\eta^{00}_{(\cdot)}$, будем именовать *максимизирующей* программой, отвечающей данной начальной позиции $\{t_*, h^*\}$ и данному отрезку времени $[t_*, \theta]$.

Задачу 4 можно трактовать как вспомогательную задачу, которая ставится в реализовавшейся позиции $\{t_*, h^{**}\}$ перед обоими игроками при следующих информационных условиях: второй игрок выбирает программу $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ и сообщает ее первому игроку, после этого первый игрок выбирает в указанной ему программе $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$ управление $\eta^0_{(\cdot)}$. У второго игрока, таким образом, остается только право заранее так распорядиться выбором программы $\{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi$, чтобы обеспечить наибольший возможный результат $\varepsilon(t_*, h^*, \theta)$ (4.4) при самом неблагоприятном для второго игрока выборе управления $\eta_{(\cdot)}$ первым игроком.

5. Принцип минимума

В этом разделе мы покажем, что решающее Задачу 3 оптимальное программное управление η_t^0, $t_* \le t < \theta$, удовлетворяет некоторому условию, которое будем называть принципом минимума (по сути дела, это условие есть не что иное, как известный принцип максимума Л.С. Понтрягина). Принцип минимума, характеризующий оптимальное программное управление η_t^0 $(t_* \le t < \theta)$ и соответствующее ему оптимальное программное движение $x^0(t) = x(t, t_*, h^*, \eta^0_{(\cdot)})$ из Задачи 3 при условии

$$\min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_\Pi} \rho\big(\theta, x(\theta)\big) > \varepsilon \tag{5.1}$$

формулируется следующим образом.

Лемма 5.1. *Оптимальное управление* η_t^0 $(t_* \le t < \theta)$, *разрешающее Задачу 4, и порожденное им оптимальное программное движение* $x^0(t) = x(t, t_*, h^*, \eta^0_{(\cdot)})$ *при условии* (5.1) *удовлетворяют при почти всех значениях* $t \in [t_*, \theta)$ *равенству*

$$\int_P \int_Q s'(t) f(t, x_t^0, u, v) \eta_t^0(du, dv) = \int_Q \min_{u \in P} [s'(t) f(t, x_t^0, u, v)] \nu_t(dv). \tag{5.2}$$

Здесь $s(t)$ — *решение дифференциального уравнения*

$$\dot{s}(t) = -L'(t) s(t) \tag{5.3}$$

при краевом условии

$$s(\theta)[\partial\omega/\partial x]_{\{\theta, x_\theta^0, m^0\}} = -L'(t) s(t), \tag{5.4}$$

причем m^0 — *точка из* $M(\theta)$, *на которой достигается минимум* (6.1) *при* $t = \theta$, $x = x^0(\theta)$. *Матрица* $L(t)$ *в уравнении* (5.3) *определена равенством*

$$L(t) = \int_P \int_Q [\partial f/\partial x]_{x^0(t)} \eta_t^0(du, dv).$$

В частности, если $M = M_c$ *и величины* ω *и* ρ *определены равенствами* (4.2) *и* (4.3), *краевое условие* (5.3) *принимает вид равенства*

$$s(\theta) = \frac{x^0(\theta) - m^0}{\|x^0(\theta) - m^0\|}, \tag{5.5}$$

где $\{\theta, m^0\}$ — *точка из* $M_c(\theta)$, *ближайшая в евклидовой метрике к точке* $\{\theta, x^0(\theta)\}$. *И в общем случае функции* $\omega(t, h, m)$, *и в частном случае, при задании* $\omega(t, h, m)$ *формулой* (4.2), *точка* m^0 *может быть не единственной. Условие* (5.2) *будет выполняться при всяком выборе минимизирующей точки* m^0, *отвечающей данному оптимальному движению* $x^0(t)$ *Задачи 3.*

6. Правило максимина

При определенных условиях оптимальное программное управление η_t^{00} $(t_* \le t < \theta)$, решающее Задачу 4 на максимин (4.4), удовлетворяет условию, которое называется правилом максимина. Будем говорить, что элементарная программа $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta); \nu_{(\cdot)}\}_\Pi$ регулярна для данной позиции $\{t_*, h^*\}$, $(t_* \le \theta,\ \varepsilon(t_*, h^*, \theta) > c)$, если задача для данной позиции $\{t_*, h^*\}$ при выборе этой программы $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta); \nu_{(\cdot)}\}_\Pi$ имеет единственное по существу (т. е. до значений на множестве точек t меры нуль) решение $\eta^0_{(\cdot)}$, и значение m^0, минимизирующее величину ω в условии

$$\rho(t, h) = \min_{m \in M(t)} \omega(t, h, m) \tag{6.1}$$

при $t = \theta$ и $x = x^0(\theta)$, также единственно.

Лемма 6.1. *Пусть оптимальная минимизирующая элементарная программа из задачи* (4.4) $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta); \nu_{(\cdot)}\}_\Pi$ *для данной позиции* $\{t_*, h^*\}$, *где* $\varepsilon(t_*, h^*, \theta) > c$, *регулярна. Пусть* η_t^{00} *и* $x^{00}(t)$ $(t_* \le t < \theta)$ *суть оптимальное управление и порожденное им оптимальное движение, разрешающее эту Задачу 4.*

Тогда при почти всех значениях $t \in [t_*, \theta]$ *выполняется следующее условие максимина*

$$\int_P \int_Q s'(t) f(t, x_t^{00}, u, v) \eta_t^{00}(du, dv) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'(t) f(t, x_t^{00}, u, v) s(\theta) = \frac{x^0(\theta) - m^0}{\|x^0(\theta) - m^0\|}.$$

Здесь $s(t)$ — *решение уравнения* (5.3), *с краевым условием* (5.4), *в котором* x_θ^0 *заменено на* x_θ^{00}.

7. Регулярная игра сближения

В этом разделе рассматривается метод построения решений позиционной дифференциальной игры сближения, который базируется на вспомогательных программных конструкциях. Начнем со случая игры сближения в момент θ, когда заданный соотношением (4.4) функционал $\varepsilon_0\big(t, x, y(\cdot), \theta\big)$ оказывается функционалом инвариантно дифференцируемым в области $\varepsilon_0\big(t, x, y(\cdot), \theta\big) > 0$. Для выбранных значений c и β ситуация при выборе $\sigma(h) = \rho(\theta, h)$ называется *регулярной*, если для всякой позиции $\{t_*, h^*\}$ из области

$$G = \big[\{t_*, h^*\} : \, t \le \theta, \; c < \varepsilon_0(t_*, h^*, \theta) < c + \beta\big] \tag{7.1}$$

Задача 4 имеет единственное по существу решение $\eta_{(\cdot)}^{00}$ (т. е. решение $\eta_{(\cdot)}^{00}$ $(t_* \le t < \theta)$ единственное с точностью до значений на множестве нулевой меры), и значение m^{00}, минимизирующее $\omega(t, h, m)$ в (6.1) при $t = \theta$ и при $x = x^{00}(\theta)$, тоже единственно (здесь может быть $c = -\infty$ или $c + \beta = \infty$). В частности, будем называть игру сближения с множеством M_c в момент θ *регулярной*, если Задача 4 при выборе $\rho(t, h)$ из условия (4.3) будет иметь единственное по существу решение $\eta_{(\cdot)}^{00}$ и точка $\{\theta, m^{00}\}$ из M_c, ближайшая к точке $\{\theta, x_\theta^{00}\}$, тоже будет единственной для всякой позиции $\{t_*, h_*\}$ из области (7.1), где β — достаточно малое положительное число.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.1. *Если при выбранных* c *и* β *ситуация для задачи при*

$$\sigma(x) = \rho(\theta, x) = \min_{m \in M(\theta)} \omega(\theta, x, m)$$

является регулярной, то в области (7.1) *функционал* $\varepsilon_0(t, h, \theta)$, *заданный соотношением* (4.4), *имеет инвариантно непрерывные частные производные* $\dfrac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и коинвариантную производную* $\partial_t \varepsilon_0$, *и эти производные определяются равенствами*

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x}\right]_{\{t_*, h^*\}} = \left\{\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_i}, \; i = 1, \ldots, n\right\}_{\{t_*, h^*\}} = s(\theta, t_*),$$

$$(\partial_t \varepsilon_0)_{\{t_*, h^*\}} = -\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \big[s'(\theta, t_*) f(t_*, h^*, u, v)\big].$$

Здесь $s(\theta, t)$ — *решение дифференциального уравнения*

$$ds/dt = -L'(t) s \tag{7.2}$$

при краевом условии

$$s(\theta,\theta) = \left[\frac{\partial\omega}{\partial x}\right]_{\{\theta, x^{00}_\theta, m^{00}\}},$$

причем

$$L'(t) = \int_P \int_Q \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}_{x^{00}(t)} \eta^{00}_t(du,dv).$$

Теперь мы можем рассмотреть специальную вспомогательную программную задачу.

Задача 5. Дана начальная позиция $\{t_*, h^*\}$, отрезок времени $[t_*, \theta]$ и непустое множество $M(\theta)$. Требуется найти максимизирующую программу $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}^0_\Pi = \{\eta_{(\cdot)}\}^0_\Pi$ и в ней максиминное управление $\eta^0_{(\cdot)}$, которое удовлетворяет следующему условию

$$\begin{aligned} \rho\big(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta^{00}_{(\cdot)})\big) &= \min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}^0_\Pi} \rho\big(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}\big) = \\ &= \max_{\{\eta_{(\cdot)}\}} \min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}^0_\Pi} \rho\big(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}\big) = \varepsilon^0(t_*, h^*, \theta). \end{aligned} \tag{7.3}$$

При выбранных значениях c и $\beta > 0$ и при выборе $\sigma(x) = \rho(\theta, x)$ ситуация в минимаксной игре называется *регулярной*, если для всякой позиции $\{t_*, h^*\}$ из области

$$t_0 < t < \theta, \quad c < \varepsilon^0(t_*, h^*, \theta) < c + \beta \tag{7.4}$$

задача имеет единственное по существу решение — оптимальное максиминное управление η^{00}_t $(\,t_* \le t < \theta\,)$ и точка m^{00}, минимизирующая $\omega(t,x,m)$ в (6.1) при $t = \theta$ и $x = x^{00}(\theta)$, также единственна.

В регулярном случае оптимальное управление η^{00}_t $(\,t_* \le t < \theta\,)$ и оптимальное движение $x^{00}(t)$, разрешающие Задачу 5, удовлетворяют следующему условию минимакса:

$$\int_P \int_Q s'(t) f(t, x^{00}_t, u, v) \eta^{00}_t(du,dv) = \min_u \max_v \big[s'(t) f(t, x^{00}_t, u, v)\big]$$

при почти всех $t \in [t_*, \theta)$. Здесь $s(t)$ — решение уравнения вида (5.5), в котором η^{00}_t и $x^{00}(t)$ суть решения Задачи 5 (а не решения Задачи 4).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.2. *Если при выбранных значениях c и $\beta > 0$ ситуация в минимаксной игре при выборе*

$$\sigma(x) = \rho(\theta, x)$$

является регулярной, то в соответствующей области (7.4) *функционал $\varepsilon^0(t_*, h^*, \theta)$, заданный соотношением* (7.3), *имеет инвариантно непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и коинвариантную производную $\partial_t\varepsilon^0$, и эти производные в каждой позиции $\{t_*, h^*\}$ из области* (7.4) *определяются равенствами*

$$\left[\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial x_i}\right] = s(\theta, t_*), \tag{7.5}$$

$$\partial_t\varepsilon^0 = \min_u \max_v \big[s'(\theta, t_*) f(t_*, h^*, u, v)\big] \tag{7.6}$$

где $s'(\theta, t_*)$ — решение дифференциального уравнения (7.2), *в котором η^{00}_t и $x^{00}(t)$ суть решения Задачи 5 (а не Задачи 4).*

Из (7.5) и (7.6) следует, что при выполнении условия регулярности минимаксной игры в области (7.4) функционал $\varepsilon^0(t_*, h, \theta)$ удовлетворяет условию (2.3). Стало быть, в частности, если $c = \sigma_0$ и $c + \beta = \sigma^0$ из (2.2), то этот функционал $\varepsilon^0(t_*, h, \theta)$ будет в регулярном случае удовлетворять условиям Теоремы 2.1. Следовательно, в таком случае рассматриваемая игра будет иметь седловую точку, определяемую парой стратегия–контрстратегия $\{U^0, V_c^u\}$, где U^0 и V_c^u определены соответственно функционалами $u^0(t,h)$ и $v^0(t,h,u)$, которые в области (2.1) находятся из условий

$$\min_v \left[s'(\theta,t)f(t,h,u^0(t,h),v)\right] = \min_u \max_v \left[s'(\theta,t)f(t,h,u,v)\right],$$
$$s'(\theta,t)f(t,h,u,v^0(t,h)) = \max_v [s'(\theta,t)f(t,h,u,v)],$$

а вне этой области могут быть произвольными. Цена этой игры определяется равенством

$$\gamma_0 = \gamma_u^0 = \varepsilon(t,h,\theta).$$

References

[1] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974; англ. пер.:N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, *Game-theoretical Control Problems*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1976.

[2] Ю. С. Осипов, “Дифференциальные игры систем с последействием”, *Доклады Академии наук*, **198**:4 (1971), 475–478; англ. пер.:Yu. S. Osipov, “Differential games of systems with delays”, *Doklady Mathematics*, **198**:4 (1971), 710–713.

[3] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством”, *ПММ*, **37**:1 (1973), 3–13. [A. V. Kryazhimskii, Yu. S. Osipov, “Differential-difference Game of Approaching with a Functional Target Set Ordered Spaces”, *PMM*, **37**:1 (1973), 3–13].

[4] А. В. Кряжимский, “Дифференциально-разностная игра уклонения от функциональной цели”, *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1973, № 4, 71–79. [A. V. Kryazhimskii, “Differential-difference Game of Evation from a Functional Target Set”, *Izv ANSSSR. Technical cybernetics*, 1973, № 4, 71–79].

[5] N. A. Andryushechkina, A. V. Ivanov, A. V. Kim, “Application of i-Smooth Analysis to Differential Games with Delays”, *Control Applications of Optimization*, Proceedings of the 17th IFAC Workshop (Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018), Krasovskii Inst. of Mathematics and Mechanics, UB of RAS, Yekaterinburg, 2018, 19e.

[6] A. V. Kim, *i-Smooth Analysis. Theory and Applications*, Wiley, New Jersey, 2015.

[7] A. V. Kim, A. V. Ivanov, *Systems with Delays. Analysis, Control, Computations*, Wiley, New Jersey, 2015.

Информация об авторах

Ким Аркадий Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: avkim@imm.uran.ru

Information about the authors

Arkadii V. Kim, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Scientific Researcher. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: avkim@imm.uran.ru

Бочаров Геннадий Алексеевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: bocharov@inm.ras

Gennady A. Bocharov, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Scientific Researcher. Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation. E-mail: bocharov@inm.ras

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Ким Аркадий Владимирович
E-mail: avkim@imm.uran.ru

Corresponding author:
Arkadii V. Kim
E-mail: avkim@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.
Поступила после рецензирования 19.07.2020 г.
Принята к публикации 19.11.2020 г.

Received 28.05.2020
Reviewed 19.07.2020
Accepted for press 19.11.2020